MENENTUKAN PENYELESAIAN PERTIDAKSAMAAN

DENGAN METODE TITIK PEMECAH

Warsito

Program Studi Matematika FMIPA Universitas Terbuka

warsito@ut.ac.id

Abstrak

Penyelesaian pertidaksamaan $(x-a)<0$, $a\in R$ adalah $x<a$ (menggunakan sifat medan bilangan real), berarti nilai x yang memenuhi pertidaksamaan adalah x yang lebih kecil dari nilai a. Cara lain menentukan nilai x pertidaksamaan tersebut dengan cara mengenolkan faktor $(x-a)$, yaitu $x-a=0$ atau $x=a$, sehingga terjadi dua buah selang, yaitu $(-\infty,a)$ dan (a,∞). Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan diperoleh dengan cara mensubstitusikan sebuah nilai **titik uji** (*test point*) pada selang $(-\infty,a)$, (a,∞), atau kedua-duanyanya. Titik $x=a$ disebut **titik pemecah** (*split point*), dan metode penyelesaian pertidaksamaannya disebut **metode titik pemecah**, yang selanjutnya akan digunakan untuk menyelesaikan pertidaksamaan berbentuk:

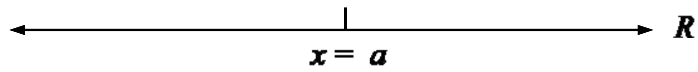
$\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^n}{(x-b_1)(x-b_2)^2\dots(x-b_m)^m}<0$, untuk $m,n\in N$ bilangan asli

Kata kunci : *penyelesaian, pertidaksamaan,titik uji, titik pemecah*.

PENDAHULUAN

Penyelesaian pertidaksamaan $(x-a)<0$, $a\in R$ sering menggunakan salah satu sifat medan bilangan real. Dengan menambahkan bilangan a pada kedua ruas pertidaksamaan, maka diperoleh $x<a$. Jadi, yang memenuhi pertidaksamaan tersebut adalah x yang lebih kecil dari a.

Cara lain menentukan nilai x adalah dengan cara mengnolkan faktor $(x-a)$, yaitu $(x-a)=0$ atau $x=a$. Titik a disebut **titik pemecah** (*split point*). Kalau digambarkan ke dalam garis bilangan real R sehingga akan terlihat sebagai berikut.



Gambar 1. Garis bilangan real

Disini terjadi 2 buah selang, yaitu $(-\infty, a)$ dan (a, ∞). Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan diperoleh dengan cara mensubstitusikan sebuah nilai pada selang $(-\infty, a)$, (a, ∞), atau kedua-duanyanya. Titik x disebut **titik uji** (*test point*)

Permasalahannya, apakah penggunaan metode titik pemecah tersebut dapat diterapkan untuk bentuk pertidaksamaan yang lebih rumit/kompleks?

Kajian ini bertujuan menghitung atau mencari penyelesaian pertidaksamaan yang lebih rumit dalam bentuk: $\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^n}{(x-b_1)(x-b_2)^2\ldots(x-b_m)^m} < 0$ dengan $m, n \in N$ (bilangan asli) dan bentuk varian lainnya "$\leq$", "$>$", atau "$\geq$".

METODOLOGI

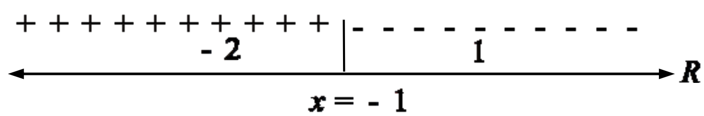
Penyelesaian pertidaksamaan dengan menggunakan metode pemecah melalui tahapan pembahasan secara berurutan pertidaksamaan bentuk: (a) $(x-a_1) < 0$; (b) $(x-a_1)(x-a_2) < 0$; (c) $(x-a_1)(x-a_2)^2 < 0$; (d) $(x-a_1)(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^n < 0$; (e) $\dfrac{(x-a_1)}{(x-b_1)} < 0$; dan tujuan akhir kajian dibahas bentuk (f) $\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^n}{(x-b_1)(x-b_2)^2\ldots(x-b_m)^m} < 0$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

(a) Bentuk $(x-a_1) < 0$

Untuk membahas bentuk $(x - a_1) < 0$, sebagai ilustrasi diselesaikan pertidaksamaan bentuk $(x + 1) < 0$. Karena $(x + 1) < 0$, maka hanya ada satu faktor yaitu $(x + 1)$. Mengnolkan faktor $(x + 1)$, berarti $x + 1 = 0$ dan titik pemecahnya $x = -1$. Dengan demikian terjadi 2 buah selang yaitu $(-\infty, -1)$ dan $(-1, \infty)$.

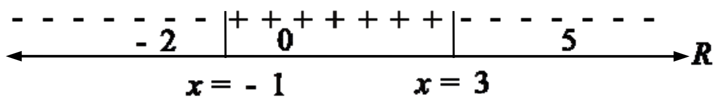
Jika diambil sebarang nilai **titik uji** pada selang $(-\infty, -1)$, misalkan $x = -2$, maka pertidaksamaan menjadi $(-2 + 1) < 0$ sehingga $x = -2$ memenuhi pertidaksamaan, dan kesimpulannya nilai-nilai x pada selang $(-\infty, -1)$ memenuhi pertidaksamaan. Tetapi, jika diambil titik uji $x = 1$ maka pertidaksamaan menjadi $(1 + 1) < 0$ sehingga $x = 1$ tidak memenuhi pertidaksamaan, dan kesimpulannya nilai-nilai x pada selang $(-1, \infty)$ tidak memenuhi pertidaksamaan. Kalau digambar pada garis bilangan, terlihat pada Gambar 2 berikut ini.



Gambar 2. Dua selang dengan satu titik pemecah

(b) Bentuk $(x - a_1)(x - a_2) < 0$

Untuk bentuk $(x - a_1)(x - a_2) < 0$, ambil ilustrasi $(x + 1)(x - 3) < 0$. Terdapat 2 titik pemecah, yaitu $x = -1$ dan $x = 3$. Terjadi 3 buah selang, yaitu $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, dan $(3, \infty)$. Ambil titik uji $x = -2$, maka $(-2 + 1)(-2 - 3) < 0$ sehingga x pada $(-\infty, -1)$ tidak memenuhi. Ambil titik uji $x = 0$, maka $(0 + 1)(0 - 3) < 0$ sehingga x pada $(-1, 3)$ memenuhi. Ambil titik uji $x = 5$, maka $(5 + 1)(5 - 3) < 0$ sehingga x pada $(3, \infty)$ tidak memenuhi. Kalau digambar pada garis bilangan, terlihat pada Gambar 3 berikut ini.



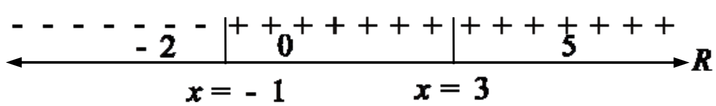
Gambar 3. Tiga selang dengan dua titik pemecah

Sebetulnya titik uji cukup diambil satu buah saja di sebarang selang, selanjutnya pada selang yang bersebelahan akan otomatis berganti tanda. Misalkan, ambil titik uji $x = 5$ pada selang $(3, \infty)$ menghaslikan tanda "–", maka pada selang $(-1, 3)$ akan bertanda "+", dan selanjutnya pada selang $(-\infty, -1)$ bertanda "–".

Bentuk (b) dapat diperluas ke bentuk $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) < 0$ (setiap faktor berpangkat 1). Penyelesaiannya, ambil titik uji pada selang sebarang kemudian selang-selang berikutnya tanda pertidaksamaannya akan bergantian.

(c) Bentuk $(x - a_1)(x - a_2)^2 < 0$

Bentuk $(x - a_1)(x - a_2)^2 < 0$, ambil ilustrasi $(x + 1)(x - 3)^2 < 0$. Terdapat 2 buah titik pemecah, yatu $x = -1$ dan $x = 3$. Terjadi 3 buah selang, yaitu $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, dan $(3, \infty)$.



Gambar 4. Tiga selang dengan dua titik pemecah

Titik pemecah $x = 3$, yang berasal dari pangkat faktor genap, dapat diabaikan karena tidak memberikan perubahan tanda. Sehingga, sebetulnya dapat dianggap terdapat satu buah titik pemecah dangan 2 buah selang $(-\infty, -1)$ dan $(-1, \infty)$. Ini sesuai dengan salah satu sifat medan bilangan real bahwa tanda pertidaksamaan tidak berubah jika kedua ruas pertidaksamaan dikalikan/dibagi dengan bilangan positif [dalam hal ini $(x - 3)^2$].

(d) Bentuk $(x - a_1)(x - a_2)^2\ldots(x - a_n)^n < 0$

Bentuk (d) kalau dibagi dengan faktor yang berpangkat genap, maka akan berubah menjadi:

$$\begin{cases} (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)<0 & ,n \text{ gasal} \\ (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{n-1})<0 & ,n \text{ genap} \end{cases}$$

Untuk n gasal terdapat $\frac{n+1}{2}$ titik pemecah dengan $\frac{n+3}{2}$ selang. Untuk n genap terdapat $\frac{n}{2}$ dengan $\frac{n+2}{2}$. Penyelesaian bentuk terakhir ini analog dengan penyelesaian perluasan bentuk (b).

(e) Bentuk $\dfrac{(x-a_1)}{(x-b_1)}<0$

Untuk membahas bentuk $\dfrac{(x-a_1)}{(x-b_1)}<0$, perhatikan ilustrasi **tanda** pertidaksamaan (**bukan nilai**nya) antara **pembagian** dan **perkalian** 2 faktor berikut ini.

$$\frac{8}{4}>0 \qquad (8)(4)>0$$

$$\frac{-8}{4}<0 \qquad (-8)(4)<0$$

$$\frac{8}{-4}<0 \qquad (8)(-4)<0$$

$$\frac{-8}{-4}>0 \qquad (-8)(-4)>0$$

Dari ilustrasi tersebut, antar pembagian atau antar perkalian 2 faktor yang sama maka **tidak mengubah tanda** pertidaksamaan. Dengan demikian, untuk bentuk yang lebih umum juga berlaku, yaitu $\dfrac{(x-a_1)}{(x-b_1)}<0$ dapat diubah menjadi $(x-a_1)(x-b_1)<0$. Di sini terdapat 2 titik pemecah dengan 3 selang. Penyelesaiannya analog dengan penyelesaian bentuk (b).

(f) Bentuk $\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^n}{(x-b_1)(x-b_2)^2\ldots(x-b_m)^m}<0$

Bentuk ini berdasarkan (e) dapat diubah menjadi:

$(x - a_1)(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^n (x - b_1)(x - b_2)^2 \ldots (x - b_m)^m < 0$.

Kemudian berdasarkan bentuk (d), maka dapat diubah menjadi:

(1) $(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_n)(x - b_1)(x - b_3)\ldots(x - b_m) < 0$ yang memiliki $\frac{1}{2}(m + n + 2)$ titik pemecah, untuk m dan n gasal;

(2) $(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_{n-1})(x - b_1)(x - b_3)\ldots(x - b_m) < 0$ yang memiliki $\frac{1}{2}(m + n + 1)$ titik pemecah, untuk m gasal dan n genap;

(3) $(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_{n-1})(x - b_1)(x - b_3)\ldots(x - b_{m-1}) < 0$ yang memiliki $\frac{1}{2}(m + n)$ buah titik pemecah, untuk m dan n genap; atau

(4) $(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_n)(x - b_1)(x - b_3)\ldots(x - b_{m-1}) < 0$ yang memiliki $\frac{1}{2}(m + n + 1)$ titik pemecah, untuk m genap dan n gasal.

KESIMPULAN

Bentuk $\dfrac{(x - a_1)(x - a_2)^2 \ldots (x - a_n)^n}{(x - b_1)(x - b_2)^2 \ldots (x - b_m)^m} < 0$ dapat diubah menjadi bentuk:

(1) $(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_n)(x - b_1)(x - b_3)\ldots(x - b_m) < 0$ yang memiliki $\frac{1}{2}(m + n + 2)$ titik pemecah, untuk m dan n gasal.

(2) $(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_{n-1})(x - b_1)(x - b_3)\ldots(x - b_m) < 0$ yang memiliki $\frac{1}{2}(m + n + 1)$ titik pemecah, untuk m gasal dan n genap.

(3) $(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_{n-1})(x - b_1)(x - b_3)\ldots(x - b_{m-1}) < 0$ yang memiliki $\frac{1}{2}(m + n)$ buah titik pemecah, untuk m dan n genap.

(4) $(x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_n)(x - b_1)(x - b_3)\ldots(x - b_{m-1}) < 0$ yang memiliki $\frac{1}{2}(m + n + 1)$ titik pemecah, untuk m genap dan n gasal.

Setelah pertidaksamaan berbentuk (1), (2), (3), atau (4) kemudian diambil sebuah titik uji pada salah satu selang. Dipenuhi atau tidak dipenuhi pada selang dimana titik uji diambil akan memberikan tidak dipenuhi atau dipenuhi secara bergantian pada selang berikutnya.

Bentuk pertidaksamaan “<” dapat dimodifikasi atau disesuaikan ke dalam bentuk pertidaksamaan yang lain yaitu bentuk “>”, “£ ”, atau “³ ”.

DAFTAR PUSTAKA

Dale Varberg, Purcell, Edwin J., Rigdon, Steven E. (2007). *Calculus*. USA: Pearson Education, Inc.